Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

11 mai 2023

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

Soient E un espace vectoriel et a un vecteur de E. Soit φ une forme linéaire sur E. On définit $u(x) = x + \varphi(x)a$. Vérifier que u est un endomorphisme de E, puis calculer u^2. A quelle condition u est-elle injective ?

Solution : *Soient $\alpha, \alpha' \in \mathbb{K}$ et $x, x' \in E$. Par linéarité de φ*

$$u\left(\alpha x + \alpha' x'\right) = \alpha x + \alpha' x' + \varphi\left(\alpha x + \alpha' x'\right) a = \alpha\left(x + \varphi(x)a\right) + \alpha'\left(x' + \varphi(x')a\right) = \alpha u\left(x\right) + \alpha' u\left(x'\right)$$

donc u est linéaire.

Soit $x \in E$.

$$u^2\left(x\right) = u\left(x + \varphi(x)a\right) = u\left(x\right) + \varphi(x) u\left(a\right) = x + \varphi(x)a + \varphi\left(x\right)\left(a + \varphi\left(a\right) a\right) = x + \left(2 + \varphi\left(a\right)\right)\varphi\left(x\right) a$$

L'application u est injective si et seulement si son noyau est réduit au vecteur nul de E. Mais $u\left(x\right) = 0 \iff x + \varphi\left(x\right) a = 0 \iff x = -\varphi\left(x\right) a$. Donc un vecteur x est élément du noyau de u si et seulement si il existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $x = \alpha a$ et $\varphi\left(x\right) = -\alpha$. On a alors $\alpha a = -\alpha\varphi\left(a\right) a$ ce qui s'écrit aussi $\alpha\left(1 - \varphi\left(a\right)\right) a = 0$. Pour que le noyau de u ne soit pas trivial, il faut donc que $\varphi\left(a\right) = -1$, dans quel cas, u n'est pas injective. Sinon, si $\varphi\left(a\right) \neq -1$, φ est injective.

Références