

Pas de titre

Alain Soyeur¹, Emmanuel Vieillard-Baron², and François Capaces³

¹Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

²Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg

³, ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★ Pas de titre

Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel et $f, g \in E^*$ deux formes linéaires telles que $\forall x \in E$, $f(x)g(x) = 0_K$. Montrer que $f = 0$ ou $g = 0$.

Solution : Si il existe $a \in E$ tel que $f(a) \neq 0$ et $b \in E$ tel que $g(b) \neq 0$, alors

$$0 = f(a+b)g(a+b) = f(a)g(a) + f(a)g(b) + f(b)g(a) + f(b)g(b) = f(a)g(b) + f(b)g(a).$$

Donc $f(a)g(b) = -f(b)g(a)$ et comme $f(a) \neq 0$, $g(b) \neq 0$, nécessairement $f(b) \neq 0$ et $g(a) \neq 0$. Il vient alors que $f(a)g(a) \neq 0$ ce qui est contraire à notre hypothèse de départ. Donc $f = 0$ ou $g = 0$.

Références