Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★★ ***Pas de titre***

Soient deux projecteurs p et q d'un espace vectoriel E. Montrer que l'endomorphisme $(p+q)$ est un projecteur de E si et seulement si l'on a $p \circ q = q \circ p = 0$. Si c'est le cas, montrer qu'alors $\operatorname{Im}(p+q) = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Im} q$ et que $\operatorname{Ker}(p+q) = \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q$.

Solution :

— *On suppose que $p+q$ est un projecteur. Alors $(p+q)^2 = p+q$ et en développant, on obtient $p^2+q^2+p\circ q+q\circ p = p+q$. p, q étant des projecteurs, on a : $p^2 = p$ et $q^2 = q$ et donc $p\circ q + q \circ p = 0$. On va montrer que $\operatorname{Im} q \subset \operatorname{Ker} p$ ce qui amènera $p \circ q = 0$ et donc $q \circ p = 0$. Soit $y \in \operatorname{Im} q$. Alors $p(y) + q(p(y)) = 0$. Comme $E = \operatorname{Ker} q \oplus \operatorname{Im} q$, il existe $X \in \operatorname{Ker} q$ et $Y \in Imq$ tel que $p(y) = X + Y$. Alors $X + Y + q(X+Y) = 0$ soit $X + 2Y = 0$. Par unicité de la décomposition d'un vecteur sur une somme directe, il vient $X = Y = 0$ et donc $p(y) = 0$. On a prouvé que $\operatorname{Im} q \subset \operatorname{Ker} q$ et la première implication est démontrée.*

— *Pour la seconde, supposons que $p\circ q = q \circ p = 0$ alors $(p+q)^2 = p^2+q^2+p\circ q+q\circ p = p+q$ car p et q sont des projecteurs.*

— *On suppose dans la suite que $(p+q)$ est un projecteur de E.*

  — *Montrons que $\operatorname{Im}(p+q) = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Im} q$. Soit $x \in \operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q$. Alors $p(x) = q(x) = x$ et il vient $q(p(x)) = x$. Mais $q \circ p = 0$ donc $x = 0$. Donc $\operatorname{Im} p$ et $\operatorname{Im} q$ sont en somme directe. Si $x \in \operatorname{Im} p+q$ alors $x = (p+q)(x) = p(x)+q(x) \in \operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q$ et $\operatorname{Im} p+q \subset \operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q$. Si $x \in \operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q$ alors il existe $x_1 \in \operatorname{Im} p$ et $x_2 \in \operatorname{Im} q$ tel que $x = x_1 + x_2$. Mais $(p+q)(x) = p(x_1)+p(x_2)+q(x_1)+q(x_2) = x_1+x_2$ car $\operatorname{Im} q \subset \operatorname{Ker} p$ et $\operatorname{Im} p \subset \operatorname{Ker} q$ en vertu de $p\circ q = q\circ p = 0$. Donc $x \in \operatorname{Im} p+q$ et on prouve ainsi par double inclusion que $\operatorname{Im}(p+q) = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Im} q$.*

  — *Montrons maintenant que $\operatorname{Ker}(p+q) = \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q$. On montre facilement que $\operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q \subset \operatorname{Ker}(p+q)$. Soit $x \in \operatorname{Ker}(p+q)$. Alors $p(x)+q(x) = 0$ et $p(x) = -q(x)$. Posons $y = p(x)$. On sait alors que $y \in \operatorname{Im} p$ et que $y \in \operatorname{Im} q$. Mais $\operatorname{Im} p \subset \operatorname{Ker} q$ et $\operatorname{Im} q \subset \operatorname{Ker} p$ donc $y \in \operatorname{Ker} q$ et $y \in \operatorname{Ker} p$. Comme $E = \operatorname{Ker} p \oplus \operatorname{Im} p$ et $E = \operatorname{Ker} q \oplus \operatorname{Im} q$, ceci n'est possible que si $y = 0$. Donc $x \in \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q$ et l'égalité est prouvée par double inclusion.*

Références