Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

18 juin 2022

Exercice 0.1 ★★★ ***Pas de titre***

[Décomposition du noyau] Soient un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E et un endomorphisme $f \in L(E)$ vérifiant $f^2 = -\operatorname{id}_E$. On note

$$F = \{x \in E \mid f(x) = ix\} \text{ et } G = \{x \in E \mid f(x) = -ix\}$$

Montrer que $E = F \oplus G$ et exprimer le projecteur sur F parallèlement à G.

Solution : *Pour tout $x \in E$, on a $x = -\frac{i}{2}\left(f\left(x\right) + ix\right) + \frac{i}{2}\left(f\left(x\right) - ix\right)$ et on vérifie que $f\left(x\right) + ix \in F$, $f\left(x\right) - ix \in G$. En effet :*

$$f\left(f\left(x\right) + ix\right) = f^2\left(x\right) + if\left(x\right) = -ix + if\left(x\right) = i\left(f\left(x\right) + ix\right)$$

$$f\left(f\left(x\right) - ix\right) = f^2\left(x\right) - if\left(x\right) = -if\left(x\right) - if\left(x\right) = -i\left(f\left(x\right) - ix\right)$$

Donc $E = F + G$. Si $x \in F \cap G$ alors on a en même temps $f\left(x\right) = ix$ et $f\left(x\right) = -ix$ ce qui n'est possible que si $x = 0$. Donc F et G sont en somme directe. En conclusion, $E = F \oplus G$.

Montrons que $p = -\frac{i}{2}\left(f + i\operatorname{id}\right)$ est le projecteur sur F parallèlement à G. Soit $x = x_1 + x_2 \in F \oplus G$. Alors $p\left(x\right) = -\frac{i}{2}\left(f\left(x_1\right) + f\left(x_2\right) + i\left(x_1 + x_2\right)\right) = -\frac{i}{2}\left(ix_1 - ix_2 + ix_1 + ix_2\right) = x_1$, ce qu'il fallait montrer.

Cet exercice est un cas particulier du théorème de décomposition du noyau que vous verrez en deuxième année.

Références