Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

15 avril 2024

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u \in L(E)$. Soit p un projecteur de E.
Montrer que u et p commutent si et seulement si $\operatorname{Im} p$ et $\operatorname{Ker} p$ sont stables par u.

Solution :

- *Supposons que u et p commutent. Soit $y \in \operatorname{Im} p$. Mais $p\left(u\left(y\right)\right) = u\left(p\left(y\right)\right) = u\left(y\right)$ car $y \in \operatorname{Im} p$. Donc $u\left(y\right) \in \operatorname{Im} p$ et $\operatorname{Im} p$ est stable par u. Si $x \in \operatorname{Ker} p$ alors $p\left(u\left(x\right)\right) = u\left(p\left(x\right)\right) = 0$ donc $u\left(x\right) \in \operatorname{Ker} p$ et $\operatorname{Ker} p$ est aussi stable par u.*
- *On suppose $\operatorname{Im} p$ et $\operatorname{Ker} p$ sont stables par u. Comme p est un projecteur, $E = \operatorname{Ker} p \oplus \operatorname{Im} p$. Soit $x \in E$. Il existe un unique couple $\left(x', x''\right) \in \operatorname{Ker} p \times \operatorname{Im} p$ tel que $x = x' + x''$. Il vient que $u \circ p\left(x\right) = u\left(x''\right)$ et que $p \circ u\left(x\right) = p\left(u\left(x''\right)\right) = u\left(x''\right)$. On a montré que $u \circ p\left(x\right) = p \circ u\left(x\right)$ donc u et v commutent.*

Références