Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

2 janvier 2022

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u \in L(E)$. Soit p un projecteur de E.
Montrer que u et p commutent si et seulement si $\operatorname{Im} p$ et $\operatorname{Ker} p$ sont stables par u.

Solution :

— *Supposons que u et p commutent. Soit $y \in \operatorname{Im} p$. Mais $p(u(y)) = u(p(y)) = u(y)$ car $y \in \operatorname{Im} p$. Donc $u(y) \in \operatorname{Im} p$ et $\operatorname{Im} p$ est stable par u. Si $x \in \operatorname{Ker} p$ alors $p(u(x)) = u(p(x)) = 0$ donc $u(x) \in \operatorname{Ker} p$ et $\operatorname{Ker} p$ est aussi stable par u.*

— *On suppose $\operatorname{Im} p$ et $\operatorname{Ker} p$ sont stables par u. Comme p est un projecteur, $E = \operatorname{Ker} p \oplus \operatorname{Im} p$. Soit $x \in E$. Il existe un unique couple $(x', x'') \in \operatorname{Ker} p \times \operatorname{Im} p$ tel que $x = x' + x''$. Il vient que $u \circ p(x) = u(x'')$ et que $p \circ u(x) = p(u(x'')) = u(x'')$. On a montré que $u \circ p(x) = p \circ u(x)$ donc u et v commutent.*

Références