Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

29 novembre 2022

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et p un projecteur de E. Résoudre l'équation $p(x) + 3x = y$ où $y \in E$.

Solution : *Comme p est un projecteur, les sous-espaces $\operatorname{Ker} p$ et $\operatorname{Im} p$ sont supplémentaires dans E. Donc il existe un unique couple $(x', x'') \in \operatorname{Ker} p \times \operatorname{Im} p$ tel que $x = x' + x''$ et il existe un unique couple $(y', y'') \in \operatorname{Ker} p \times \operatorname{Im} p$ tel que $y = y' + y''$. Il vient :*

$$p(x)+3x = y \iff x''+3x'+3x'' = y'+y'' \iff \underbrace{3x'}_{\in \operatorname{Ker} p} + \underbrace{4x''}_{\in \operatorname{Im} p} = \underbrace{y'}_{\in \operatorname{Ker} p} + \underbrace{y''}_{\in \operatorname{Im} p} \iff \begin{cases} 3x' &= y' \\ 4x'' &= y'' \end{cases} \iff x = \frac{y'}{3}+\frac{y''}{4}$$

par unicité de la décomposition des vecteurs dans $E = \operatorname{Ker} p \oplus \operatorname{Im} p$. En conclusion, $\boxed{x = \dfrac{y - p(y)}{3} + \dfrac{p(y)}{4}}$.

Références