Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Soient un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et deux projecteurs p, q de E vérifiant $poq = 0$. On pose $r = p + q - qop$.

1. *Montrer que r est un projecteur ;*
2. *Montrer que $\operatorname{Ker} r = \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q$;*
3. *Montrer que $\operatorname{Im} r = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Im} q$.*

Indication 0.0 : *Interpréter la relation $p \circ q = 0$ en fonction des images et noyaux de p, q. Dans les démonstrations, on pourra utiliser le fait que si r est un projecteur, et $x \in E$, $x \in \operatorname{Im} r \iff r(x) = x$.*

Solution :

1. *Calculons*

$$r^2 = p^2 + pq - pqp + qp + q^2 - q^2p - qp^2 - qpq + qpqp = p + qp + q - qp - qp = p + q - qp = r$$

(on a utilisé que $p^2 = p$, $q^2 = q$ et $pq = 0$). Donc r est un projecteur (r est linéaire).

2. $\operatorname{Ker} r \subset \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q$ *: soit $x \in \operatorname{Ker} r$, alors $p(x) + q(x) - qp(x) = 0$, et en appliquant p, on trouve que $p^2(x) + pq(x) - pqp(x) = 0$, d'où $p(x) = 0$, c'est-à-dire $x \in \operatorname{Ker} p$. De même, en appliquant q, on montre que $x \in \operatorname{Ker} q$.*

   $\operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q \subset \operatorname{Ker} r$, *c'est évident.*

3. $\operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q = \{0\}$ *: soit $x \in \operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q$, alors $pq(x) = 0 \Rightarrow p(x) = 0$ (car $x \in \operatorname{Im} q$) et alors $x = 0$ ($p(x) = x$, car $x \in \operatorname{Im} p$). La somme est donc directe.*

   $\operatorname{Im} r \subset \operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q$ *: soit $x \in \operatorname{Im} r$, puisque r est un projecteur, $r(x) = x$ et donc*

$$x = p(x) + q(x) - qp(x) = p(x) + q\big[x - p(x)\big]$$

   et $p(x) \in \operatorname{Im} p$, $q\big(x - p(x)\big) \in \operatorname{Im} q$.

   $\operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q \subset \operatorname{Im} r$ *: soit $x \in \operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q$, $\exists x_1 \in \operatorname{Im} p, \exists x_2 \in \operatorname{Im} q$ tels que $x = x_1 + x_2$. Alors, $r(x) = p(x_1) + p(x_2) + q(x_1) + q(x_2) - qp(x_1) - qp(x_2) = x_1 + x_2 + p(x_2) + q(x_1) - qp(x_1) - qp(x_2)$.*

Mais $p \circ q = 0 \Rightarrow \operatorname{Im} q \subset \operatorname{Ker} p$, *donc* $p(x_2) = 0$. *Alors* $r(x) = x + q\big(x_1 - p(x_1)\big)$, *mais puisque* $x_1 \in \operatorname{Im} p$, *on sait que* $p(x_1) = x_1$, *et donc* $r(x) = x$. *Comme* r *est un projecteur,* $r(x) = x \Rightarrow x \in \operatorname{Im} r$.

Références