Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Soit un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et deux projecteurs p, q de E vérifiant :

$$p \circ q = q \circ p$$

1. *Montrer que $p \circ q$ est un projecteur :*
2. *Montrer que $\operatorname{Im}(p \circ q) = \operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q$;*
3. *Montrer que $\operatorname{Ker}(p \circ q) = \operatorname{Ker} p + \operatorname{Ker} q$.*

Solution :

1. *Calculons*
$$(p \circ q)^2 = p \circ q \circ p \circ q = p \circ p \circ q \circ q = p^2 \circ q^2 = p \circ q$$
Donc $p \circ q$ est un projecteur.
2. $\operatorname{Im}(p \circ q) \subset \operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q$ *: soit $y \in \operatorname{Im}(p \circ q)$. $\exists x \in E$ tel que $y = p \circ q(x)$. Comme $y = p\big(q(x)\big)$, $y \in \operatorname{Im} p$. Mais puisque $p \circ q = q \circ p$, on a également $y = q\big(p(x)\big) \in \operatorname{Im} q$. Donc $y \in \operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q$.*
$\operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q \subset \operatorname{Im}(p \circ q)$. *Utilisons la caractérisation de l'image d'un projecteur : Soit $x \in \operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q$. Alors $p(x) = q(x) = x$. Alors $p \circ q(x) = p\big(q(x)\big) = p(x) = x$ et par conséquent, $x \in \operatorname{Im} p \circ q$.*
3. *Montrons $\operatorname{Ker} p + \operatorname{Ker} q \subset \operatorname{Ker}(p \circ q)$: Soit $x \in \operatorname{Ker} p + \operatorname{Ker} q$; $\exists (x_p, x_q) \in \operatorname{Ker} p \times \operatorname{Ker} q$ tels que*
$$x = x_p + x_q$$
Alors
$$p \circ q(x) = p\big(q(x_p) + q(x_q)\big) = p\big(q(x_p)\big) = q\big(p(x_p)\big) = q(0) = 0$$
donc $x \in \operatorname{Ker}(p \circ q)$.
Montrons que $\operatorname{Ker}(p \circ q) \subset \operatorname{Ker} p + \operatorname{Ker} q$. Soit $x \in \operatorname{Ker}(p \circ q)$. Posons $x_p = q(x)$ et $x_q = x - q(x)$. On a bien $x = x_p + x_q$ et
$$p(x_p) = p \circ q(x) = 0 \Rightarrow x_p \in \operatorname{Ker} p$$
$$q\big(x - q(x)\big) = q(x) - q^2(x) = q(x) - q(x) = 0 \Rightarrow x_q \in \operatorname{Ker} q$$

Références