Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Soit un projecteur p d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Montrer que

$$\forall \lambda \in K \setminus \{0, 1\}, \quad p - \lambda\,\mathrm{id} \in \mathrm{GL}(E)$$

Indication 0.0 : *On fera deux démonstrations. Pour la première, utiliser la relation polynomiale $p \circ p = p$. Pour la deuxième, écrire que $E = \operatorname{Ker} p \oplus \operatorname{Im} p$, et résoudre l'équation $(p - \lambda\,\mathrm{id})(x) = y$, en décomposant sur $\operatorname{Ker} p$ et $\operatorname{Im} p$ les vecteurs x et y.*

Solution : ***Première démonstration.*** *On a $p \circ p = p$, donc $p^2 - p = 0$, et alors $(p - \lambda\,\mathrm{id}) \circ (p + (\lambda - 1)\,\mathrm{id}) + \lambda(\lambda - 1)\,\mathrm{id} = 0$ donc si $\lambda \notin \{0, 1\}$, on peut écrire*

$$(p - \lambda\,\mathrm{id}) \circ \Big[\frac{-1}{\lambda(\lambda - 1)}\big(p + (\lambda - 1)\,\mathrm{id}\big)\Big] = \mathrm{id}$$

ce qui montre que $(p - \lambda\,\mathrm{id})$ est inversible.

Deuxième démonstration. *Soit $y \in E$. On décompose $y = y_1 + y_2$ avec $y_1 \in \operatorname{Ker} p$ et $y_2 \in \operatorname{Im} p$. Soit $x = x_1 + x_2 \in E$. Alors $(p - \lambda\,\mathrm{id})(x) = y \iff x_2 - \lambda(x_1 + x_2) = y_1 + y_2$ $\iff -\lambda x_1 = y_1$ et $(1 - \lambda)x_2 = y_2$ (on a utilisé le fait que la somme est <u>directe</u> et donc que la décomposition est unique). On trouve une unique solution $x_1 = -\frac{1}{\lambda} y_1$ et $x_2 = \frac{1}{1 - \lambda} y_2$, c'est-à-dire qu'il existe un unique antécédant à y par l'application $(p - \lambda\,\mathrm{id})$. Cette application est donc bijective.*

Références