# Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

***Exercice 0.1*** ★★ ***Pas de titre***

*Soient $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $p, q \in \mathfrak{L}(E)$. Montrer l'équivalence entre :*

1. $p \circ q = p$ *et* $q \circ p = q$.
2. $p$ *et* $q$ *sont des projecteurs et* $\operatorname{Ker} p = \operatorname{Ker} q$.

***Solution :***

— *Comme*
$$p^2 = p \circ \underbrace{q \circ p}_{=q} \circ q = p \circ q \circ q = p \circ q = p,$$
$p$ *est un projecteur. On montre de même que* $q$ *est un projecteur. Si* $x \in \operatorname{Ker} p$ *alors* $q(x) = q \circ p(x) = 0$ *donc* $x \in \operatorname{Ker} q$ *et* $\operatorname{Ker} p \subset \operatorname{Ker} q$. *On montre de même que* $\operatorname{Ker} q \subset \operatorname{Ker} p$. *Donc* $\operatorname{Ker} p = \operatorname{Ker} q$.

— *Comme* $q$ *est un projecteur,* $\operatorname{Ker} p$ *et* $\operatorname{Im} p$ *sont supplémentaires dans* $E$ . *Soit* $x \in E$. *Il existe un unique couple* $(x', x'') \in \operatorname{Ker} q \times \operatorname{Im} q$ *tel que* $x = x' + x''$. *Alors*
$$p \circ q(x) = p \circ q(x'') = p(x'') \quad \text{et} \quad p(x) = p(x' + x'') = p(x'')$$
*car* $\operatorname{Ker} p = \operatorname{Ker} q$ *et que* $q(x'') = x''$. *Donc* $p \circ q(x) = p(x)$ *et* $p \circ q = p$. *On montre de même que* $q \circ p = q$.

## Références