Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $p \in \mathfrak{L}(E)$.

1. *Montrer que p est un projecteur si et seulement si $\mathrm{id} - p$ l'est.*
2. *On suppose que p est un projecteur. Exprimer alors $\mathrm{Im}(\mathrm{id} - p)$ et $\mathrm{Ker}(\mathrm{id} - p)$ en fonction de $\mathrm{Im}\, p$ et $\mathrm{Ker}\, p$.*

Solution :

1. *Comme $(\mathrm{id} - p)^2 = \mathrm{id} - 2p + p^2$, p est un projecteur si et seulement si $\mathrm{id} - p$ est un projecteur.*
2. *On a $\mathrm{Ker}\, p = \mathrm{Im}(\mathrm{id} - p)$. En effet, si $x \in \mathrm{Ker}\, p$ alors $p(x) = 0$ et $(\mathrm{id} - p)(x) = x$. Donc $x \in \mathrm{Im}(\mathrm{id} - p)$. Réciproquement, si $x \in \mathrm{Im}(\mathrm{id} - p)$ alors il existe x_0 tel que $x = (\mathrm{id} - p)(x_0)$ Donc $p(x) = p(x_0) - p^2(x_0) = 0$.*

Références