Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

Soit :

$$\theta : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & \theta(P) \end{array} \right.$$

où $\theta(P)$ est le polynôme donné par :

$$(\theta(P))(X) = \frac{P(X)+P(-X)}{2}.$$

1. *Prouver que θ est linéaire.*
2. *Prouver que l'ensemble des polynômes pairs est stable par θ.*
3. *Montrer que $\theta \circ \theta = \theta$. Que peut-on en déduire pour θ.*
4. *Déterminer $\operatorname{Ker} \theta$ et $\operatorname{Im} \theta$. En déduire les éléments caractéristiques de θ.*

Solution :

1. *Facile.*
2. *On montre aussi facilement que si P est pair, il en est de même de $\theta(P)$.*
3. *Soit P un polynôme à coefficients réels, on a :*

$$\theta \circ \theta(P)(X) = \theta\left(\frac{P(X)+P(-X)}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{P(X)+P(-X)}{2} + \frac{P(-X)+P(X)}{2}\right) = \theta(P)(X)$$

   donc θ est un projecteur.
4. *Si $\theta(P) = 0$ alors $\forall X \in \mathbb{R}, \quad P(X) = -P(-X)$ donc P est impair. Réciproquement si P est impair alors $\theta(P)$. $\operatorname{Ker} \theta = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P$ a tous ses termes de degré pair nuls$\}$. On a par ailleurs $\theta(P)$ est pair pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$. Réciproquement, si P est pair, alors $\theta(P) = P$ donc $\operatorname{Im} \theta = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P$ a tous ses termes de degré impair nuls$\}$.*

Références