Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

23 mars 2024

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

Dans l'espace $\mathbb{R}^3$, on considère les sous-espaces $E_1 = \mathrm{Vect}(1,1,1)$ et $E_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0\}$. Déterminer l'expression analytique du projecteur p sur E_2 parallèlement à E_1.

Solution : *On vérifie facilement que E_1 et E_2 sont supplémentaires dans $E = \mathbb{R}^3$. On note $e = (e_1, e_2, e_3)$ la base de E formée de $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ et $e_3 = (0,0,1)$. On remarque que $E_1 = Vect\,(f_1)$ avec $f_1 = (1,1,1)$ et que $E_2 = Vect\,(f_2, f_3)$ avec $f_2 = (1,0,-1)$ et $f_3 = (0,1,-1)$. En utilisant les outils du chapitre **??**, on montre que f_1, f_2, f_3 ne sont pas coplanaires et qu'ils forment donc une base f de E. Soit $v \in E$. On note (x,y,z) les coordonnées de v dans e et (α, β, γ) ses coordonnées dans f. De l'égalité $v = xe_1 + ye_2 + ze_3 = \alpha f_1 + \beta f_2 + \gamma f_3$ on tire le système $\begin{cases} x &= \beta + \alpha \\ y &= \gamma + \alpha \\ z &= -\beta - \gamma + \alpha \end{cases}$ qui est équivalent à $\begin{cases} \beta &= \frac{1}{3}(2x - y - z) \\ \gamma &= \frac{1}{3}(-x + 2y + z) \\ \alpha &= \frac{1}{3}(x + y + z) \end{cases}$. Comme $f_1 \in E_1$ et que $f_2, f_3 \in E_2$ on doit avoir*

$$p\,(v) = \beta f_2 + \gamma f_3 = \frac{1}{3}\left((2x - y - z)(1,0,-1) + (-x + 2y + z)(0,1,-1)\right) = \frac{1}{3}(2x - y - z, -x + 2y + z, -x - y)$$

et donc $\boxed{p\,(x,y,z) = \frac{1}{3}(2x - y - z, -x + 2y + z, -x - y)}$.

Références