Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

28 novembre 2022

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

Dans l'espace $\mathbb{R}^3$*, on considère les sous-espaces* $E_1 = \mathrm{Vect}(1,1,1)$ *et* $E_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0\}$*. Déterminer l'expression analytique du projecteur* p *sur* E_2 *parallèlement à* E_1*.*

Solution : *On vérifie facilement que* E_1 *et* E_2 *sont supplémentaires dans* $E = \mathbb{R}^3$*. On note* $e = (e_1, e_2, e_3)$ *la base de* E *formée de* $e_1 = (1,0,0)$*,* $e_2 = (0,1,0)$ *et* $e_3 = (0,0,1)$*. On remarque que* $E_1 = Vect\,(f_1)$ *avec* $f_1 = (1,1,1)$ *et que* $E_2 = Vect\,(f_2, f_3)$ *avec* $f_2 = (1,0,-1)$ *et* $f_3 = (0,1,-1)$*. En utilisant les outils du chapitre* **??***, on montre que* f_1, f_2, f_3 *ne sont pas coplanaires et qu'ils forment donc une base* f *de* E*. Soit* $v \in E$*. On note* (x,y,z) *les coordonnées de* v *dans* e *et* (α,β,γ) *ses coordonnées dans* f*. De l'égalité* $v = xe_1 + ye_2 + ze_3 = \alpha f_1 + \beta f_2 + \gamma f_3$ *on tire le système* $\begin{cases} x &= \beta + \alpha \\ y &= \gamma + \alpha \\ z &= -\beta - \gamma + \alpha \end{cases}$ *qui est équivalent à* $\begin{cases} \beta &= \frac{1}{3}(2x - y - z) \\ \gamma &= \frac{1}{3}(-x + 2y + z) \\ \alpha &= \frac{1}{3}(x + y + z) \end{cases}$*. Comme* $f_1 \in E_1$ *et que* $f_2, f_3 \in E_2$ *on doit avoir*

$$p(v) = \beta f_2 + \gamma f_3 = \frac{1}{3}\left((2x - y - z)(1,0,-1) + (-x + 2y + z)(0,1,-1)\right) = \frac{1}{3}(2x - y - z, -x + 2y + z, -x - y)$$

et donc $\boxed{p(x,y,z) = \frac{1}{3}(2x - y - z, -x + 2y + z, -x - y)}$.

Références