Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

14 octobre 2022

Exercice 0.1 ★★★ ***Pas de titre***

Soit un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E et un endomorphisme $u \in L(E)$. Soient deux réels distincts $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que :

$$(u - a\,\mathrm{id}) \circ (u - b\,\mathrm{id}) = 0$$

1. *Montrer que $E = \mathrm{Ker}(u - a\,\mathrm{id}) \oplus \mathrm{Ker}(u - b\,\mathrm{id})$.*
2. *Déterminer la restriction de u à $\mathrm{Ker}(u - a\,\mathrm{id})$ et à $\mathrm{Ker}(u - b\,\mathrm{id})$.*

Solution :

1. *Remarquons tout d'abord que $\mathrm{Ker}(u - a\,\mathrm{id})$ et $\mathrm{Ker}(u - b\,\mathrm{id})$ sont bien des sous-espaces vectoriels de E car ce sont des noyaux d'applications linéaires. Soit $x \in \mathrm{Ker}(u - a\,\mathrm{id}) \cap \mathrm{Ker}(u - b\,\mathrm{id})$. Alors $u(x) = ax$ et $u(x) = bx$. Comme $a \neq b$ on a forcément $x = 0$ et les deux sous-espaces sont en somme directe. Remarquons que $1/(b-a)\,(X-a) + 1/(a-b)\,(X-b) = 1$ donc $1/(b-a)\,(u - a\,\mathrm{id}_E) + 1/(a-b)\,(u - b\,\mathrm{id}_E) = \mathrm{id}_E$. De plus, en vertu du fait que $(u - a\,\mathrm{id}) \circ (u - b\,\mathrm{id}) = 0$, $\mathrm{Im}\, 1/(b-a)\,(u - a\,\mathrm{id}_E) \subset \mathrm{Ker}(u - b\,\mathrm{id})$ et $\mathrm{Im}\, 1/(a-b)\,(u - b\,\mathrm{id}_E) \subset \mathrm{Ker}(u - a\,\mathrm{id})$. De plus, pour tout $x \in E$ on a :*

$$x = \underbrace{\frac{1}{b-a}\left(u(x) - ax\right)}_{\in \mathrm{Ker}(u - b\,\mathrm{id})} + \underbrace{\frac{1}{a-b}\left(u(x) - bx\right)}_{\in \mathrm{Ker}(u - a\,\mathrm{id})}$$

   donc $E = \mathrm{Ker}(u - a\,\mathrm{id}) + \mathrm{Ker}(u - b\,\mathrm{id})$. En conclusion, on a bien $E = \mathrm{Ker}(u - a\,\mathrm{id}) \oplus \mathrm{Ker}(u - b\,\mathrm{id})$.

2. *Déterminons la restriction de u à $\mathrm{Ker}(u - a\,\mathrm{id})$. Si $x \in \mathrm{Ker}(u - a\,\mathrm{id})$ alors $u(x) = ax$ donc $u_{|\,\mathrm{Ker}(u - a\,\mathrm{id})}$ est une homothétie de rapport a. De même $u_{|\,\mathrm{Ker}(u - b\,\mathrm{id})}$ est une homothétie de rapport b.*

Références