Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Soient deux endomorphismes $(f, g) \in L(E)^2$ *tels que* $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Ker} g = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Im} g$. *Montrer que* $(f+g) \in \mathrm{GL}(E)$.

Solution :

1. *Montrons que* $\operatorname{Ker}(f+g) = \{0_E\}$. *Soit* $x \in \operatorname{Ker}(f+g)$. *Comme* $E = \operatorname{Ker}(f)+\operatorname{Ker}(g)$, *il existe* $(x_1, x_2) \in \operatorname{Ker}(f) \times \operatorname{Ker}(g)$ *tels que* $x = x_1 + x_2$. *Alors* $f(x) = f(x_2)$ *et* $g(x) = g(x_1)$. *Comme* $(f+g)(x) = 0$, *on en déduit que* $f(x_2) + g(x_1) = 0$, *c'est-à-dire* $z = f(x_2) = -g(x_1) \in \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g$. *Mais puisque la somme* $\operatorname{Im}(f)+\operatorname{Im}(g)$ *est directe,* $\operatorname{Im}(f)\cap\operatorname{Im}(g) = \{0_E\}$ *et donc* $f(x_2) = g(x_1) = 0_E$ *ce qui montre que* $f(x) = g(x) = 0_E$, *c'est-à-dire* $x \in \operatorname{Ker}(f) \cap \operatorname{Ker}(g)$. *Mais puisque la somme* $\operatorname{Ker}(f) + \operatorname{Ker}(g)$ *est directe, finalement* $x = 0_E$.
2. *Montrons que* $E = \operatorname{Im}(f+g)$. *Soit* $y \in E$. *Comme* $E = \operatorname{Im}(f)+\operatorname{Im}(g)$, *il existe* $(x_1, x_2) \in E^2$ *tel que* $y = x_1 + x_2$. *Mais comme* $E = \operatorname{Ker}(f) + \operatorname{Ker}(g)$, *il existe* $(x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}) \in \operatorname{Ker}(f) \times \operatorname{Ker}(g) \times \operatorname{Ker}(f) \times \operatorname{Ker}(g)$ *tels que* $x_1 = x_{11} + x_{12}$ *et* $x_2 = x_{21} + x_{22}$. *Alors* $f(x_1) = f(x_{12})$ *et* $g(x_2) = g(x_{21})$. *Posons* $x = x_{12} + x_{21}$. *On calcule* $(f+g)(x) = f(x_{12}) + g(x_{12}) + f(x_{21}) + g(x_{21}) = f(x_{12}) + g(x_{21}) = y$.

Références