Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $f \in L(E)$ tel que $f^2 = \mathrm{id}$. Soit $b \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$. Montrer que l'équation $x + \lambda f(x) = b$ possède une unique solution.

Solution : *Supposons que $x \in E$ est solution de l'équation : $x + \lambda f(x) = b$ et en appliquant f, on a $\lambda x + f(x) = f(b)$. En multipliant la seconde relation par λ, et en éliminant $f(x)$, on trouve que $x = \dfrac{1}{1-\lambda^2}(b - f(b))$ $(1 - \lambda^2 \neq 0)$. Donc si l'équation possède une solution, elle est forcément unique. Vérifions que le vecteur x précédemment trouvé est bien solution :*

$$\frac{1}{1-\lambda^2}(b - f(b)) + \lambda\left(\frac{1}{1-\lambda^2}(f(b) - f^2(b))\right) = \frac{1}{1-\lambda^2}(1-\lambda^2)b = b$$

Références