Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

2 janvier 2022

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

On considère $\mathbb{C}$ comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Soit $p \in \mathbb{C}$. On définit $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ par $f(z) = z + p\overline{z}$. Vérifier que $f \in L(\mathbb{C})$ puis déterminer $\operatorname{Ker} f$. A quelle condition f est-il un automorphisme ?

Solution : *f est linéaire (vérification immédiate). Cherchons son noyau : soit $z \in \mathbb{C}$:*

$$f(z) = 0 \Rightarrow z = -p\overline{z}$$

En prenant le conjugué, $\overline{z} = -\overline{p}z$ et donc $z = |p|^2 z$ d'où $(1 - |p|^2)z = 0$.

1. *Si $|p| \neq 1$, alors $z = 0$. Par conséquent, $\operatorname{Ker} f = \{0\}$.*
2. *Si $|p| = 1$ alors $\exists \alpha \in [0, 2\pi[$ tel que $p = e^{i\alpha}$. Par ailleurs $\exists r \geqslant 0$, $\exists \theta \in [0, 2\pi[$, tels que $z = re^{i\theta}$. Alors*

$$z = -p\overline{z} \Rightarrow e^{2i\theta} = e^{i(\alpha+\pi)} \Longleftrightarrow \theta = \frac{\alpha+\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$$

Donc $\operatorname{Ker} f$ est une droite vectorielle :

$$\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}(u), \quad u = e^{i(\frac{\alpha+\pi}{2})}$$

On peut déjà conclure que si $|p| = 1$, alors f n'est pas un automorphisme.

Lorsque $|p| = 1$, on a vu que f était injective. Vérifions qu'elle est surjective. Soit $u \in \mathbb{C}$. Cherchons $z \in \mathbb{C}$ tel que $z + p\overline{z} = u$. En prenant le conjugué et en multipliant par p, on trouve que $p\overline{z} + |p|^2 z = p\overline{u}$. En éliminant $\overline{z}$, on trouve que $z = \dfrac{u - p\overline{u}}{1 - |p|^2}$ qui réciproquement vérifie bien $f(z) = u$.

En conclusion, $\boxed{f \in \mathrm{GL}(\mathbb{C}) \Longleftrightarrow |p| \neq 1}$.

Références