

# Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron<sup>1</sup>, Alain Soyeur<sup>2</sup>, and François Capaces<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg

<sup>2</sup>Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

<sup>3</sup>, ,

14 octobre 2022

## Exercice 0.1 ★ Pas de titre

Soient  $E$  un  $K$ -espace vectoriel et  $f$  un endomorphisme de  $E$  nilpotent. Prouver que  $\text{id} - f$  est inversible et exprimer son inverse en fonction de  $f$ .

**Solution :** Supposons que  $f$  est nilpotent d'ordre  $n \in \mathbb{N}^*$ . Alors par linéarité de  $f$  il vient que :  
 $(\text{id} - f) \circ (\text{id} + f + f^2 + \dots + f^{n-1}) = (\text{id} + f + f^2 + \dots + f^{n-1}) - (f + f^2 + \dots + f^{n-1} + f^n) = \text{id}$   
par télescopage et car  $f^n = 0$ . De même  $(\text{id} + f + f^2 + \dots + f^{n-1}) \circ (\text{id} - f) = \text{id}$  donc  $\text{id} - f$  est inversible et  $(\text{id} - f)^{-1} = \text{id} + f + f^2 + \dots + f^{n-1}$ .

## Références