Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

13 janvier 2022

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

On considère les deux endomorphismes de $E = \mathbb{R}^2$ suivants :

$$u : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (y,0) \end{array} \right. \quad \text{et } v : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (0,x) \end{array} \right.$$

1. *Calculer $u \circ v$, $v \circ u$, u^2 et v^2. Conclusion ?*
2. *Montrer que l'endomorphisme $(\mathrm{id} - u)$ est inversible et déterminer son inverse.*

Solution :

1. *Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on calcule*

   — $u \circ v\,(x,y) = u\,(0,x) = (x,0)$.

   — $u^2\,(x,y) = u\,(y,0) = (0,0)$.

   — $v \circ u\,(x,y) = v\,(y,0) = (0,y)$.

   — $v^2\,(x,y) = v\,(0,x) = (0,0)$.

   donc $u \circ v$ est la projection sur les abscisses, $v \circ u$ est la projection sur les ordonnées et $u^2 = v^2 = 0$.
2. *On utilise l'exercice **??**. Comme $u^2 = 0$, $\mathrm{id} - u$ est inversible et d'inverse $\mathrm{id} + u$.*

Références