

Pas de titre

Alain Soyeur¹, Emmanuel Vieillard-Baron², and François Capaces³

¹Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

²Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg

³, ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★ Pas de titre

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et $u \in L(E)$. On suppose qu'il existe des scalaires a_0, \dots, a_n tels que $a_0 \text{id} + a_1 u + \dots + a_n u^n = 0$, avec $a_0 \neq 0$ et $a_n \neq 0$. Montrer que u est un automorphisme de E .

Solution : Comme $a_0 \text{id} + a_1 u + \dots + a_n u^n = 0$, on a $-(a_n u^n + \dots + a_1 u) = a_0 \text{id}$ et $u \left(-\frac{a_n}{a_0} u^{n-1} - \dots - \frac{a_1}{a_0} \text{id} \right) = \left(-\frac{a_n}{a_0} u^{n-1} - \dots - \frac{a_1}{a_0} \text{id} \right) u = \text{id}$ donc u est inversible et

$$u^{-1} = - \left(\frac{a_n}{a_0} u^{n-1} + \dots + \frac{a_1}{a_0} \text{id} \right).$$

Références