Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ **Pas de titre**

Soit $f \in L(E)$. On note

$$A(f) = \{g \in L(E) \mid f \circ g \circ f = 0_{L(E)}\}$$

1. *Montrer que $A(f)$ est un sous-espace vectoriel de $L(E)$.*
2. *Montrer que si f est injective, alors*

$$A(f) = \{g \in L(E) \mid \operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} g\}$$

3. *Montrer que si f est surjective, alors*

$$A(f) = \{g \in L(E) \mid \operatorname{Im} g \subset \operatorname{Ker} f\}$$

Solution :

1. *L'endomorphisme nul est clairement dans $A(f)$ donc $A(f)$ n'est pas vide. Soient $g, g' \in A(f)$ et $\alpha, \alpha' \in \mathbb{K}$. Alors par linéarité de f :*

$$f \circ (\alpha g + \alpha' g') \circ f = \alpha f \circ g \circ f + \alpha' f \circ g \circ f = 0$$

car $g, g' \in A(f)$. Donc $A(f)$ est stable par combinaison linéaire. C'est bien un sous-espace vectoriel de $L(E)$.

2. *Supposons que f soit injective. Si $g \in L(E)$ est tel que $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} g$ alors pour tout $x \in E$, $f \circ g \circ f(x) = 0$ (car $f(x) \in \operatorname{Ker} g$) donc $g \in A(f)$. Réciproquement, si $g \in A(f)$ alors pour tout $x \in E$, $g(f(x)) \in \operatorname{Ker} f$. Mais comme $\operatorname{Ker} f = \{0\}$, il vient que $g(f(x)) = 0$ et donc que $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} g$.*
3. *Supposons maintenant que f est surjective. Si $g \in L(E)$ est tel que $\operatorname{Im} g \subset \operatorname{Ker} f$ alors pour tout $x \in E$, $f \circ g \circ f(x) = 0$ car $g(f(x)) \in \operatorname{Im} g \subset \operatorname{Ker} f$. Donc $g \in A(f)$. Réciproquement, si $g \in A(f)$ et si $y \in \operatorname{Im} g$ alors il existe $x \in E$ tel que $g(x) = y$ et comme f est surjective, il existe $x' \in E$ tel que $x = f(x')$. Alors $g \circ f(x') = y$. Mais $f(y) = f \circ g \circ f(x') = 0$ car $f \circ g \circ f = 0$. Donc $y \in \operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} g \subset \operatorname{Ker} f$.*

Références