Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

3 juillet 2022

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f, g \in L(E)$. On suppose que

$$fogof = f, \quad \text{et} \quad gofog = g$$

Montrer que

$$E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} g$$

Solution : *Soit $x \in \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} g$. Alors $f(x) = 0$ et il existe $x_0 \in E$ tel que $x = g(x_0)$. Donc $g \circ f \circ g(x_0) = x$ mais on a aussi $g \circ f \circ g(x_0) = g \circ f(x) = 0$ donc $x = 0$ et $\operatorname{Ker} f$, $\operatorname{Im} f$ sont en somme directe.*

Soit $x \in E$. On peut écrire $x = x - g \circ f(x) + g \circ f(x)$ et comme $f(x - g \circ f(x)) = f(x) - f \circ g \circ f(x) = f(x) - f(x) = 0$, il vient que $x - g \circ f(x) \in \operatorname{Ker} f$. Par ailleurs, il est clair que $g \circ f(x) \in \operatorname{Im} g$ donc $E = \operatorname{Im} f + \operatorname{Ker} f$.

En conclusion, $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont bien supplémentaires dans E.

Références