

Pas de titre

Alain Soyeur¹, Emmanuel Vieillard-Baron², and François Capaces³

¹Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

²Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg

³, ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ Pas de titre

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $f \in L(E)$. On pose

$$N = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \text{Ker } f^i$$

1. Montrer que $N = \text{Ker } f \Rightarrow \text{Ker } f + \text{Im } f$ est directe.
2. Etudier la réciproque.

Solution :

1. Supposons que $N = \text{Ker } f$. Alors pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $\text{Ker } f^i \subset \text{Ker } f$. Comme par ailleurs, on a toujours $\text{Ker } f \subset \text{Ker } f^i$, il vient que pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $\text{Ker } f^i = \text{Ker } f$. Soit $x \in \text{Ker } f \cap \text{Im } f$. Alors il existe $x_0 \in E$ tel que $x = f(x_0)$ et par ailleurs $f(x) = 0$. Comme $f(f(x_0)) = 0$ et que $\text{Ker } f = \text{Ker } f^2$, il vient que $x_0 \in \text{Ker } f$ et donc $x = 0$. La somme est bien directe.
2. Supposons que $\text{Ker } f + \text{Im } f$ soit directe. Remarquons qu'on a toujours $\text{Ker } f \subset \text{Ker } f^2$. Soit $x \in \text{Ker } f^2$. Alors $f(f(x)) = 0$. Mais $f(x) \in \text{Im } f \cap \text{Ker } f = \{0\}$ donc $f(x) = 0$. Alors $x \in \text{Ker } f$. On a montré que $\text{Ker } f = \text{Ker } f^2$. On en déduit que $\text{Ker } f^2 = \text{Ker } f^3$, ... et donc que $N = \text{Ker } f$.

Références