Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★★ ***Pas de titre***

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $p \in \mathbb{N}^*$ et $f \in L(E)$.

1. *Montrer que* $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2 \Rightarrow \operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^n$ *pour* $n \geqslant 2$.
2. *Montrer que* $\operatorname{Im} f^p = \operatorname{Im} f^{p+1} \Rightarrow \operatorname{Im} f^n = \operatorname{Im} f^p$ *pour* $n \geqslant p$.

Solution :

1. *On effectue un raisonnement par récurrence. La propriété est, par hypothèse, vraie au rang 2. Supposons qu'elle est vraie au rang n pour $n \geqslant 2$ et prouvons là au rang $n+1$. On sait déjà que $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} f^{n+1}$. Si $x \in \operatorname{Ker} f^{n+1}$ alors $f^n\left(f\left(x\right)\right) = 0$ et donc $f\left(x\right) \in \operatorname{Ker} f^n = \operatorname{Ker} f$. Donc $f^2\left(x\right) = 0$ et $x \in \operatorname{Ker} f^2 = \operatorname{Ker} f$. La propriété est alors aussi vraie au rang $n+1$. On termine en appliquant le théorème de récurrence.*
2. *Montrons par une récurrence sur $n \geqslant p+1$ que $\operatorname{Im} f^n = \operatorname{Im} f^p$. La propriété est vraie par hypothèse au rang $p+1$. Soit $n \geqslant p+1$. Supposons que $\operatorname{Im} f^n = \operatorname{Im} f^p$ et montrons que $\operatorname{Im} f^{n+1} = \operatorname{Im} f^p$. On a toujours $\operatorname{Im} f^{n+1} \subset \operatorname{Im} f^p$. Si $y \in \operatorname{Im} f^p$ alors il existe $x \in E$ tel que $y = f^p\left(x\right)$. Comme $\operatorname{Im} f^p = \operatorname{Im} f^{p+1}$, il existe $x' \in E$ tel que $y = f^p\left(x\right) = f^{p+1}\left(x'\right)$. Mais d'après l'hypothèse de récurrence , il existe $x'' \in E$ tel que $f^n\left(x''\right) = f^p\left(x''\right)$. Donc $y = f\left(f^n\left(x\right)\right) = f^{n+1}\left(x''\right)$ et donc $\operatorname{Im} f^p \subset \operatorname{Im} f^{n+1}$. On termine en appliquant le théorème de récurrence.*

Références