

Pas de titre

Alain Soyeur¹, Emmanuel Vieillard-Baron², and François Capaces³

¹Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

²Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg

³, ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★ Pas de titre

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et $f \in L(E)$. Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que $\text{Ker } f = \text{Ker } f^p \Rightarrow \text{Ker } f = \text{Ker } f^n$ pour $n \in \llbracket 1, p \rrbracket$.
2. Montrer que $\text{Im } f = \text{Im } f^p \Rightarrow \text{Im } f = \text{Im } f^n$ pour $n \in \llbracket 1, p \rrbracket$.

Solution :

1. On vérifie facilement que $\text{Ker } f \subset \text{Ker } f^2 \subset \dots \subset \text{Ker } f^p$. Donc si $\text{Ker } f = \text{Ker } f^p$ les inclusions précédentes deviennent des égalités.
2. De même, il est clair que $\text{Im } f^p \subset \text{Im } f^{p-1} \subset \dots \subset \text{Im } f^2 \subset \text{Im } f$ donc si $\text{Im } f = \text{Im } f^p$, ces inclusions deviennent là aussi des égalités.

Références