Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★★ ***Pas de titre***

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $g \in L(E)$. On définit :

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} L(E) & \longrightarrow & L(E) \\ f & \longmapsto & gof \end{array} \right.$$

On admettra que dans un espace vectoriel, tout sous-espace vectoriel admet un supplémentaire.

1. *Montrer que φ est linéaire*
2. *Montrer que φ est injective si et seulement si g est injective*
3. *Montrer que φ est bijective si et seulement si g est bijective.*

Solution :

1. *Facile.*
2. — *Supposons que φ soit injective. Soit $x_0 \in E$ tel que $g(x_0) = 0$. Par l'absurde, supposons que $x_0 \neq 0$. Posons $F = Vect(x_0)$ et considérons un supplémentaire G de F dans E. Considérons aussi l'application linéaire $f \in L(E)$ donnée par*

   $$f : \left\{ \begin{array}{ccc} E = F \oplus G & \longrightarrow & E \\ x = \alpha x_0 + x_G & \longmapsto & \alpha x_0 \end{array} \right. .$$

   Alors $\varphi(f) = g \circ f = 0 = \varphi(0)$. Comme φ est injective, il vient que $f = 0$ ce qui n'est pas possible. Donc $x_0 = 0$ et g est injective.

   — *Réciproquement, si g est injective et s'il existe $f \in L(E)$ telle que $\varphi(f) = 0$ alors pour tout $x \in E$, $g \circ f(x) = 0$ et donc pour tout $x \in E$, $f(x) \in \operatorname{Ker} g = \{0\}$. Il vient alors que $\forall x \in E$, $f(x) = 0$ autrement dit que $f = 0$. En conclusion φ est injective..*
3. — *Supposons que φ est surjective. Soit $y \in E$. Il existe $f \in L(E)$ tel que $\varphi(f) = \mathrm{id}$. Donc $g(f(y)) = y$ et $y \in \operatorname{Im} g$. On a prouvé que g est surjective.*

— *Si g est bijective, montrons qu'il en est de même de φ. On sait déjà que φ est injective. Il reste à montrer qu'elle est surjective. Soit $f \in L(E)$. Comme g est bijective, pour tout $x \in E$, il existe un unique $x_f \in E$ tel que $g(x_f) = f(x)$. On définit ainsi une application $f_0 : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x_f \end{array} \right.$. Cette application est linéaire. En effet, si $x, x' \in E$ et $\alpha, \alpha' \in \mathbb{K}$ alors $f_0(\alpha x + \alpha' x') = (\alpha x + \alpha' x')_f$ avec $(\alpha x + \alpha' x')_f$ tel que*

$$\begin{aligned} g\left((\alpha x + \alpha' x')_f\right) &= f(\alpha x + \alpha' x') \text{ par définition de } (\alpha x + \alpha' x')_f \\ &= \alpha f(x) + \alpha' f(x') \text{ par linéarité de } f \\ &= \alpha g(x_f) + \alpha' g(x') \text{ par définition de } x_f \text{ et } x'_f \\ &= g\left(\alpha x_f + \alpha' x'_f\right) \text{ par linéarité de } g \end{aligned}$$

donc par injectivité de g, $(\alpha x + \alpha' x')_f = \alpha x_f + \alpha' x'_f$ et $f_0(\alpha x + \alpha' x') = \alpha f_0(x) + \beta f_0(x')$. On en déduit que $f_0 \in L(E)$. De plus, par construction, $g \circ f_0 = f$ et φ est bien surjective.

Références