Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★★ ***Pas de titre***

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $f \in L(E)$ un endomorphisme. On définit

$$\varphi_f : \left\{ \begin{array}{lcl} L(E) & \longrightarrow & L(E) \\ u & \longrightarrow & f \circ u - u \circ f \end{array} \right.$$

1. *Montrer que $\varphi_f \in L\left(L(E)\right)$.*
2. *Montrer que si f est nilpotent, alors φ_f est aussi nilpotent.*

Solution :

1. *Soient $u, v \in L(E)$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. $\varphi_f(\alpha u + \beta v) = f \circ (\alpha u + \beta v) - (\alpha u + \beta v) \circ f = \alpha (f \circ u - u \circ f) + \beta (f \circ v - v \circ f) = \alpha \varphi_f(u) + \beta \varphi_f(v)$ par linéarité de f. Donc φ_f est linéaire.*
2. *Soit $u \in L(E)$. On a $\varphi_f^2(u) = \varphi_f(f \circ u - u \circ f) = f^2 \circ u - 2f \circ u \circ f + u \circ f^2$, puis $\varphi_f^3(u) = f^3 \circ u - 2f^2 \circ u \circ f + f \circ u \circ f^2 - f^2 \circ u \circ f + 2f \circ u \circ f^2 - u \circ f^3 = f^3 \circ u - 3f^2 \circ u \circ f + 3f \circ u \circ f^2 - u \circ f^3$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $\varphi_f^n(u) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k f^{n-k} u f^k$. Montrons que la formule est encore valable au rang $n+1$. On a (pour simplifier les calculs, on n'écrit pas les symboles de composition $\circ$) :*

$$\begin{aligned}
\varphi_f^{n+1}(u) &= \varphi_f\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k f^{n-k} u f^k\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \left(f^{n-k+1} u f^k - f^{n-k} u f^{k+1}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k f^{n-k+1} u f^k - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k f^{n-k} u f^{k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k f^{n-k+1} u f^k - \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} (-1)^{k-1} f^{n-k+1} u f^k \\
&= f^{n+1} u + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right) f^{n+1-k} u f^k + (-1)^{n+1} u f^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-1)^k f^{n+1-k} u f^k
\end{aligned}$$

d'après la relation de Pascal. La formule est donc vraie au rang $n+1$. On termine en appliquant le théorème de récurrence.

Si p est l'indice de nilpotence de f, alors en posant $n = 2p$, et en considérant $k \in [\![0, n]\!]$, soit $k \geqslant p$ soit $n - k \geqslant p$. Donc dans tous les cas, $f^{n-k} u f^k = 0$ et comme $\varphi_f^n(u) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k f^{n-k} u f^k$, il vient, pour tout $u \in L(E)$ que $\varphi_f^n(u) = 0$ et φ_f est bien nilpotent..

Références