Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

20 janvier 2022

Exercice 0.1 ★★★ ***Pas de titre***

Soit un K-espace vectoriel E et un endomorphisme $u \in L(E)$ tel que $\forall x \in E$, le système de vecteurs $(x, u(x))$ est lié. Montrer que l'application u est une homothétie.

Solution : *Par hypothèse, pour tout $x \in E$, il existe $\lambda(x) \in K$ tel que $u(x) = \lambda(x).x$. Il faut montrer que l'application $\lambda : E \longrightarrow K$ est constante. Soient deux vecteurs non nuls $(x, y) \in E^2$. Nous allons montrer que $\lambda(x) = \lambda(y)$. Comme l'application u est linéaire, on a $u(x+y) = u(x) + u(y)$ et donc $\lambda(x+y).(x+y) = \lambda(x).x + \lambda(y).y$. Donc*

$$\big(\lambda(x+y) - \lambda(x)\big).x + \big(\lambda(x+y) - \lambda(y)\big).y = 0_E$$

Étudions deux cas :

— *Si le système (x, y) est libre, on tire de la relation (1), que $\lambda(x) = \lambda(x+y) = \lambda(y)$.*

— *Si le système (x, y) est lié, l'un des vecteurs est combinaison linéaire de l'autre. Si par exemple, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0_{\mathbb{K}}$ tel que $y = \alpha.x$, comme que u est linéaire, $u(y) = u(\alpha.x) = \alpha.u(x)$ et donc*

$$\lambda(y).y = \big(\alpha \times \lambda(x)\big).x$$

d'où puisque $y = \alpha.x$,

$$\big(\alpha \times (\lambda(y) - \lambda(x))\big).x = 0_E$$

et comme $x \neq 0_E$, et $\alpha \neq 0_{\mathbb{K}}$, on obtient également dans ce cas que $\lambda(x) = \lambda(y)$.

On a donc montré que la fonction λ était constante sur $E \setminus \{0_E\}$: il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\forall x \in E \setminus \{0_E\}$, $\lambda(x) = \lambda$. On peut poser $\lambda(0_E) = \lambda$ également et donc $u = \lambda.\,\mathrm{id}_E$. Par conséquent, l'endomorphisme u est une homothétie vectorielle.

Références