Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

28 février 2024

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Soit un $\mathbb{K}$ *espace vectoriel* E *et deux endomorphismes* $(u,v) \in L(E)$ *qui commutent :*

$$u \circ v = v \circ u$$

1. *Montrer que* $\operatorname{Im} u$ *et* $\operatorname{Ker} u$ *sont stables par* v*, c'est-à- dire*

$$v(\operatorname{Ker} u) \subset \operatorname{Ker} u \text{ et } v(\operatorname{Im} u) \subset \operatorname{Im} u.$$

2. *Si l'on suppose de plus que* $E = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Ker} v$*, montrer que*

$$\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} v \text{ et } \operatorname{Im} v \subset \operatorname{Ker} u$$

Solution :

1. *Montrons que* $\operatorname{Ker} u$ *est stable par* v*. Soit* $x \in \operatorname{Ker} u$*, montrons que* $v(x) \in \operatorname{Ker} u$*. Pour cela, on calcule*

$$u\big(v(x)\big) = u \circ v(x) = v \circ u(x) = v\big(u(x)\big) = v(0_E) = 0_E$$

Donc on a bien $v(x) \in \operatorname{Ker} u$*.*
Montrons que $\operatorname{Im} u$ *est stable par* v*. Soit* $y \in \operatorname{Im} u$*. Montrons que* $v(y) \in \operatorname{Im} u$*.*
Comme $y \in \operatorname{Im} u$*,* $\exists x \in E$ *tel que* $y = u(x)$*. Alors*

$$v(y) = v \circ u(x) = u \circ v(x) = u(v(x)) \in \operatorname{Im} u$$

2. *Montrons que* $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} v$ *: Soit* $y \in \operatorname{Im} u$ *;* $\exists x \in E$ *tel que* $y = u(x)$*. Comme* $E = \operatorname{Ker} u + \operatorname{Ker} v$*,* $\exists (x_u, x_v) \in \operatorname{Ker} u \times \operatorname{Ker} v$ *tel que*

$$x = x_u + x_v$$

Mais alors

$$v(y) = v\big(u(x_u + x_v)\big) = v\big(u(x_v)\big) = v \circ u(x_v) = u \circ v(x_v) = u(0_E) = 0_E$$

et donc $y \in \operatorname{Ker} v$*.*
L'autre inclusion se prouve de la même façon.

Références