Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Paris
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

31 janvier 2023

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Soient trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels E, F, G et deux applications linéaires $f \in L(E,F)$, $g \in L(F,G)$. Montrer que :

1. $\operatorname{Ker}(gof) = \operatorname{Ker} f \Longleftrightarrow \operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Im} f = \{O_E\}$;
2. $\operatorname{Im}(gof) = \operatorname{Im} g \Longleftrightarrow \operatorname{Ker} g + \operatorname{Im} f = F$.

Solution :

1. (a) *$(i) \Rightarrow (ii)$: Soit $y \in \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} g$, alors il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Comme $y \in \operatorname{Ker} g$, $g \circ f(x) = 0$ et donc $x \in \operatorname{Ker}(g \circ f)$. Donc $x \in \operatorname{Ker} f$ et par conséquent, $f(x) = y = 0$;*

   (b) *$(ii) \Rightarrow (i)$: On a toujours $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} g \circ f$ (le vérifier !). Montrons ici que $\operatorname{Ker} g \circ f \subset \operatorname{Ker} f$. Soit $x \in \operatorname{Ker} g \circ f$. Alors $g\big(f(x)\big) = 0$. Mais en posant $y = f(x)$, $y \in \operatorname{Im} f$ et $y \in \operatorname{Ker} g$ et d'après (ii), $y = 0$. Donc $f(x) = 0$ ce qui montre que $x \in \operatorname{Ker} f$.*

2. (a) *$(i) \Rightarrow (ii)$: Soit $y \in F$. Posons $z = g(y) \in \operatorname{Im} g$. Comme $\operatorname{Im} g = \operatorname{Im} g \circ f$, il existe $x \in E$ tel que $z = g \circ f(x)$. On écrit alors*

   $$y = \big(y - f(x)\big) + f(x)$$

   avec $f(x) \in \operatorname{Im} f$ et puisque $g\big(y - f(x)\big) = g(y) - g \circ f(x) = 0$, $\big(y - f(x)\big) \in \operatorname{Ker} g$;

   (b) *$(ii) \Rightarrow (i)$: On a toujours $\operatorname{Im} g \circ f \subset \operatorname{Im} g$ (le vérifier !). Montrons donc que $\operatorname{Im} g \subset \operatorname{Im} g \circ f$. Soit $z \in \operatorname{Im} g$. Il existe $y \in F$ tel que $z = g(y)$. Mais puisque $F = \operatorname{Ker} g + \operatorname{Im} f$, il existe $(y_1, y_2) \in \operatorname{Ker} g \times \operatorname{Im} f$ tels que $y = y_1 + y_2$. Comme $y_2 \in \operatorname{Im} f$, il existe $x_2 \in E$ tel que $y_2 = f(x_2)$. Alors $z = g(y_1 + y_2) = g(y_1) + g(y_2) = g \circ f(x_2) \in \operatorname{Im} g \circ f$.*

Références