Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

20 avril 2024

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Montrer que pour toute partie A de E, $f(\operatorname{Vect}(A)) = \operatorname{Vect}(f(A))$.

Solution : *Effectuons un raisonnement par double inclusion :*

- $\boxed{\supset}$ *$\operatorname{Vect}(A)$ est un sous-espace vectoriel de E qui contient A. $f(\operatorname{Vect}(A))$ est donc un sous-espace vectoriel de F qui contient $f(A)$ car l'image d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire est un sous-espace vectoriel. Comme $\operatorname{Vect}(f(A))$ est le plus petit sous-espace vectoriel de F contenant $f(A)$, on a nécessairement $f(\operatorname{Vect}(A)) \supset \operatorname{Vect}(f(A))$*
- $\boxed{\subset}$ *Soit $y \in f(\operatorname{Vect}(A))$. Il existe $n \in \mathbb{N}^*$, $(x_i)_{i=1,\dots,n}$ une famille de vecteurs de A et $(\lambda_i)_{i=1,\dots,n}$ une famille de scalaires de $\mathbb{K}$ tels que $y = f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right)$. Par linéarité, on a :$y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$. Donc y est élément de $\operatorname{Vect}(f(A))$.*

Références