Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

Soient f et g deux endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

1. *Montrer que* $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} g \Longleftrightarrow gof = 0$.
2. *Montrer que* $fog = gof \Rightarrow \operatorname{Ker} g$ *est stable par* f.
3. *Montrer que* $gof = \operatorname{id} \Rightarrow f$ *injective.*

Solution :

1. *Si* $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} g$ *alors pour tout* $x \in E$, $f(x) \in \operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} g$ *donc* $g(f(x)) = 0$. *Donc* $gof = 0$. *Réciproquement, si* $g \circ f = 0$ *et si* $y \in \operatorname{Im} f$ *alors il existe* $x \in E$ *tel que* $y = f(x)$ *et* $g(y) = g(f(x)) = 0$ *donc* $y \in \operatorname{Ker} f$. *On a alors bien* $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$.
2. *Soit* $x \in \operatorname{Ker} g$. *Alors* $g(f(x)) = f(g(x)) = f(0) = 0$ *donc* $f(x) \in \operatorname{Ker} g$ *et* $\operatorname{Ker} g$ *est stable par* f.
3. *Si* $gof = \operatorname{id}$ *et si* $x \in \operatorname{Ker} f$ *alors* $0 = g(0) = g \circ f(x) = \operatorname{id}(x) = x$. *Donc* $x = 0$ *et* $\operatorname{Ker} f = \{0\}$. *On en déduit que* f *est injective.*

Références