

Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron¹, Alain Soyeur², and François Capaces³

¹Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg

²Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

³, ,

23 mars 2024

Exercice 0.1 ★ Pas de titre

Soient E, F, G trois \mathbb{K} -espace vectoriel, et $f \in L(E, F)$ et $g \in L(F, G)$. Montrer que :

1. $\text{Ker}(g \circ f) = f^{-1}(\text{Ker } g)$
2. $\text{Ker } f \subset \text{Ker}(g \circ f)$
3. $\text{Im } g \circ f \subset \text{Im } g$

Solution :

1. Soit $x \in \text{Ker } g \circ f$ alors comme $g(f(x)) = 0$, $f(x) \in \text{Ker } g$ et donc $x \in f^{-1}(\text{Ker } g)$. Réciproquement, si $x \in f^{-1}(\text{Ker } g)$ alors $f(x) \in \text{Ker } g$ et $g(f(x)) = 0$ ce qui s'écrit aussi $x \in \text{Ker } g \circ f$.
2. Si $x \in \text{Ker } f$ alors $f(x) = 0$ et donc $g(f(x)) = g(0) = 0$. Alors $x \in \text{Ker } g \circ f$.
3. Si $y \in \text{Im } g \circ f$ alors il existe $x \in E$ tel que $g(f(x)) = y$. Il est alors clair que $y \in \text{Im } g$ (un antécédent de y par g est $f(x)$).

Références