Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

20 juin 2022

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et $f \in L(E, F)$ et $g \in L(F, G)$. Montrer que :

1. $\operatorname{Ker}(gof) = f^{(-1)}(\operatorname{Ker} g)$
2. $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker}(g \circ f)$
3. $\operatorname{Im} g \circ f \subset \operatorname{Im} g$

Solution :

1. *Soit $x \in \operatorname{Ker} g \circ f$ alors comme $g(f(x)) = 0$, $f(x) \in \operatorname{Ker} g$ et donc $x \in f^{-1}(\operatorname{Ker} g)$. Réciproquement, si $x \in f^{-1}(\operatorname{Ker} g)$ alors $f(x) \in \operatorname{Ker} g$ et $g(f(x)) = 0$ ce qui s'écrit aussi $x \in \operatorname{Ker} g \circ f$.*
2. *Si $x \in \operatorname{Ker} f$ alors $f(x) = 0$ et donc $g(f(x)) = g(0) = 0$. Alors $x \in \operatorname{Ker} g \circ f$.*
3. *Si $y \in \operatorname{Im} g \circ f$ alors il existe $x \in E$ tel que $g(f(x)) = y$. Il est alors clair que $y \in \operatorname{Im} g$ (un antécédent de y par g est $f(x)$).*

Références