Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$. On définit

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ f & \longmapsto & \varphi(f) \end{array} \right. \quad \text{où } \varphi(f) : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sh} x}{x} f(x) & \text{si} x \neq 0 \\ f(0) & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

1. *Montrer que φ est bien définie et que $\varphi \in L(E)$.*
2. *Déterminer $\operatorname{Ker}\varphi$ et $\operatorname{Im}\varphi$.*

Solution : *En utilisant les équivalents usuels (ou plus simplement en écrivant le taux d'accroissement de sh en 0), on montre que $\dfrac{\operatorname{sh} x}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$. La fonction $\varphi(f)$ est donc continue en 0 et donc $\varphi(f) \in E$.*

Cherchons $\operatorname{Ker}\varphi$: Soit $f \in \operatorname{Ker}\varphi$. Alors $\forall x \neq 0$, $\varphi(f)(x) = 0$ et donc $\forall x \neq 0$, $f(x) = 0$ et comme f est continue en 0, il vient également que $f(0) = 0$. Par conséquent, $f = 0_E$. Donc $\operatorname{Ker}\varphi = \{0_E\}$.

Montrons que $\operatorname{Im}\varphi = E$. Soit $g \in E$. Définissons

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{x}{\operatorname{sh} x} g(x) & \text{si } x \neq 0 \\ g(0) & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

On vérifie que f est continue en 0, donc que $f \in E$ et que $\varphi(f) = g$. Par conséquent, $\operatorname{Im}\varphi = E$. Donc $\boxed{\varphi \in \mathrm{GL}(E)}$.

Références