Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

13 mai 2023

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

Soient X un ensemble non vide et $a \in X$. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et

$$\theta : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{F}(X, E) & \longrightarrow & E \\ f & \longmapsto & f(a) \end{array} \right.$$

1. *Prouver que θ est une application linéaire.*
2. *Déterminer l'image de θ_a et dire si θ est surjective.*
3. *Déterminer le noyau de θ_a et dire si θ est injective.*

Solution :

1. *On montre facilement que θ est linéaire.*
2. *Soit $v \in E$. On veut montrer qu'il existe une application $f \in \mathscr{F}(X, E)$ tel que : $f(a) = v$. Il suffit de considérer l'application constante $f : \left\{ \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & u \end{array} \right.$. θ est donc surjective.*
3. *Il est clair que $\operatorname{Ker} \theta_a = \{f \in \mathscr{F}(X, E) \mid f(a) = 0\}$. L'application θ n'est donc pas injective.*

Références