Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★ **Pas de titre**

Soit

$$\varphi : \begin{cases} \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & f'' - 2f' + f \end{cases}$$

1. *Prouver que φ est un endomorphisme.*
2. *Calculer* $\operatorname{Ker}\varphi$.
3. *φ est-elle injective ?*

Solution :

1. *Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $f, g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Utilisant la linéarité de la dérivation :* $\varphi(\alpha + \beta g) = (\alpha+\beta g)'' - 2(\alpha+\beta g)' + (\alpha+\beta g) = \alpha(f''-2f'+f) + \beta(g''-2g'+g) = \alpha\varphi(f) + \beta\varphi(g)$. *$\varphi$ est bien linéaire.*
2. *Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$. $f \in \operatorname{Ker} f$ si et seulement si $f'' - 2f' + f = 0$. En appliquant le théorème de résolution des équations différentielles linéaires du second degré à coefficients constants, on obtient :* $\operatorname{Ker} f = Vect\,(t \mapsto te^t, t \mapsto e^t)$.
3. *Il est alors clair que φ n'est pas injective.*

Références