Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

20 janvier 2022

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

Soit

$$\theta : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{C}^0\left([-1,1],\mathbb{R}\right) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \int_{-1}^{1} f\left(t\right)\,dt \end{array} \right. .$$

1. *Prouver que θ est une forme linéaire.*
2. *θ est-elle injective ?*
3. *Démontrer que θ est surjective.*

Solution :

1. *On montre facilement que θ est linéaire. Comme θ est à valeur dans $\mathbb{R}$, c'est une forme linéaire.*
2. *On a :$\int_{-1}^{1} t\,dt = 0$ donc $\mathrm{id}_{[-1,1]} \in \operatorname{Ker}\theta$. θ n'est donc par injective.*
3. *Montrons que θ est surjective : soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrons qu'il existe $f \in \mathcal{C}^0\left([-1,1],\mathbb{R}\right)$ telle que $\int_{-1}^{1} f\left(t\right)\,dt = \alpha$. Il suffit de considérer par exemple la fonction constante $f : \left\{ \begin{array}{ccc} [-1,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \frac{\alpha}{2} \end{array} \right.$. On a bien $\theta\left(f\right) = \alpha$. θ est donc surjective.*

Références