

Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron¹, Alain Soyeur², and François Capaces³

¹Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg

²Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

³, ,

21 janvier 2022

Exercice 0.1 ★★ Pas de titre

$$\text{Soit } \theta : \begin{cases} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ P & \longmapsto (P(0), P(1), P(2)) \end{cases} .$$

1. Prouver que $\theta \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X], \mathbb{R}^3)$.
2. Montrer que θ est injective.
3. Montrer que θ est surjective.

Solution :

1. On vérifie facilement que θ est linéaire.
2. Montrons que θ est injective. Soit $P \in \text{Ker } \theta$. On a donc à la fois : $\deg P \leq 2$ et $P(0) = P(1) = P(2) = 0$. Le polynôme P est donc un polynôme de degré ≤ 2 qui admet au moins 3 racines. Ceci n'est possible que si $P = 0$. Donc $\text{Ker } \theta = \{0\}$ et θ est injective.
3. Avec les outils du chapitre « Dimension d'un espace vectoriel », il sera très facile de montrer que θ est surjective grâce à la formule du rang et à un raisonnement sur les dimensions des espaces ici considérés. En attendant de connaître ces résultats, il faut procéder à la main. Soit $(s, t, u) \in \mathbb{R}^3$. On cherche un polynôme $P = aX^2 + bX + c$ tel que $(P(0), P(1), P(2)) =$

$$(s, t, u). \text{ Ceci amène le système : } \begin{cases} c = s \\ a + b + c = t \\ 4a + 2b + c = u \end{cases} \text{ qui admet comme unique solution :}$$

$(s/2 - t + u/2, -3/2s + 2t - u/2, s)$. L'application θ est donc surjective. En résumé, θ est un isomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ dans \mathbb{R}^3 .

On peut aussi écrire

$$\theta(aX^2 + bX + c) = (c, a + b + c, 4a + 2b + c) = \text{Vect}((0, 1, 4), (0, 1, 2), (1, 1, 1)) = \mathbb{R}^3$$

car ces trois vecteurs ne sont pas coplanaires.

Références