Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

20 avril 2024

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Soit $\theta : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ P & \longmapsto & (P(0), P(1), P(2)) \end{array} \right.$.

1. *Prouver que* $\theta \in \mathfrak{L}\left(\mathbb{R}_2[X], \mathbb{R}^3\right)$.
2. *Montrer que* θ *est injective.*
3. *Montrer que* θ *est surjective.*

Solution :

1. *On vérifie facilement que* θ *est linéaire.*
2. *Montrons que* θ *est injective. Soit* $P \in \operatorname{Ker}\theta$. *On a donc à la fois :* $\deg P \leqslant 2$ *et* $P(0) = P(1) = P(2) = 0$. *Le polynôme* P *est donc un polynôme de degré* $\leqslant 2$ *qui admet au moins 3 racines. Ceci n'est possible que si* $P = 0$. *Donc* $\operatorname{Ker}\theta = \{0\}$ *et* θ *est injective.*
3. *Avec les outils du chapitre « Dimension d'un espace vectoriel », il sera très facile de montrer que* θ *est surjective grâce à la formule du rang et à un raisonnement sur les dimensions des espaces ici considérés. En attendant de connaître ces résultats, il faut procéder à la main. Soit* $(s, t, u) \in \mathbb{R}^3$. *On cherche un polynôme* $P = aX^2 + bX + c$ *tel que* $(P(0), P(1), P(2)) = (s, t, u)$. *Ceci amène le système :* $\begin{cases} c = s \\ a + b + c = t \\ 4a + 2b + c = u \end{cases}$ *qui admet comme unique solution :* $(s/2 - t + u/2, -3/2s + 2t - u/2, s)$. *L'application* θ *est donc surjective. En résumé,* θ *est un isomorphisme de* $\mathbb{R}_2[X]$ *dans* $\mathbb{R}^3$.
   On peut aussi écrire
   $$\theta\left(aX^2 + bX + c\right) = (c, a + b + c, 4a + 2b + c) = Vect\left((0, 1, 4), (0, 1, 2), (1, 1, 1)\right) = \mathbb{R}^3$$
   car ces trois vecteurs ne sont pas coplanaires.

Références