

Pas de titre

Alain Soyeur¹, Emmanuel Vieillard-Baron², and François Capaces³

¹Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

²Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg

³, ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★ Pas de titre

Déterminer le noyau et l'image de l'application linéaire

$$u : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto (x + y - z, x - y + 2z) \end{cases}$$

Est-elle injective ? Surjective ?

Solution : On a $(x, y, z) \in \text{Ker } u \iff \begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = -2x \\ y = -3x \end{cases}$
donc $\text{Ker } u = \text{Vect}(1, -3, -2)$. u n'est donc pas injective. Par ailleurs, $\text{Im } u = \{(x + y - z, x - y + 2z) \mid (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\} = \{x(1, 1) + y(1, -1) + z(-1, 2) \mid (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\} = \text{Vect}((1, 1), (1, -1), (-1, 2)) = \mathbb{R}^2$ car les vecteurs $(1, 1), (1, -1)$ sont non colinéaires et ils engendrent donc le plan. u est donc surjective.

Références