

Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron¹, Alain Soyeur², and François Capaces³

¹Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Paris

²Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

³, ,

7 avril 2023

Exercice 0.1 ★ Pas de titre

$$\text{Soit } f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto (2x - y, x + y) \end{cases}$$

1. Prouver que f est linéaire.
2. Déterminer le noyau et l'image de f .

Solution :

1. On vérifie facilement que f est linéaire.
2. Montrons que f est bijective. On en déduira que $\text{Ker } f = \{0\}$ et que $\text{Im } f = \mathbb{R}^2$. Soit $(X, Y) \in \mathbb{R}^2$. Il suffit de montrer qu'il existe un et seul couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(x, y) = (X, Y)$.

Pour ce faire, résolvons :
$$\begin{cases} 2x - y = X \\ x + y = Y \end{cases} . \text{ L'unique solution est } \left(x = \frac{X + Y}{3}, y = \frac{2Y - X}{3} \right)$$
 et f est donc bien bijective.

Références