Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

21 janvier 2022

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (2x-y, x+y) \end{array} \right.$

1. *Prouver que f est linéaire.*
2. *Déterminer le noyau et l'image de f.*

Solution :

1. *On vérifie facilement que f est linéaire.*
2. *Montrons que f est bijective. On en déduira que* $\operatorname{Ker} f = \{0\}$ *et que* $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^2$. *Soit* $(X,Y) \in \mathbb{R}^2$. *Il suffit de montrer qu'il existe un et seul couple* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ *tel que* $f(x,y) = (X,Y)$. *Pour ce faire, résolvons :* $\begin{cases} 2x - y = X \\ x + y = Y \end{cases}$. *L'unique solution est* $\left(x = \dfrac{X+Y}{3}, y = \dfrac{2Y-X}{3} \right)$ *et f est donc bien bijective.*

Références