Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Paris
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

7 avril 2023

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^6 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x,0,y,0,z,0) \end{cases}$

1. *Prouver que f est linéaire.*
2. *Déterminer le noyau de f.*
3. *Déterminer l'image de f.*

Solution :

1. *Facile.*
2. *Soit* $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. *On a :* $(x,y,z) \in \operatorname{Ker} f \iff f(x,y,z) = 0 \iff (x,0,y,0,z,0) = (0,0,0,0,0,0) \iff (x,y,z) = (0,0,0)$ *donc* $\operatorname{Ker} f = \{(0,0,0)\}$ *et f est injective.*
3. $\operatorname{Im} f = \left\{ f(x,y,z) \mid (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \right\} = \left\{ (x,0,y,0,z,0) \mid (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \right\} = \mathbb{R} \times \{0\} \times \mathbb{R} \times \{0\} \times \mathbb{R} \times \{0\}$.

Références