# Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

***Exercice 0.1*** ★ ***Pas de titre***

*On considère*

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & \left(\frac{\sqrt{2}}{2}(x-y), \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y)\right) \end{cases}$$

1. *Montrer que $f$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$.*
2. *Déterminer son automorphisme réciproque.*
3. *Interpréter géométriquement $f$.*

***Solution :***

1. *On vérifie facilement que $f$ est linéaire. Montrons que $f$ est bijective : Soit $(X,Y) \in \mathbb{R}^2$. Il suffit de montrer qu'il existe un et un seul couple $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(x,y) = (X,Y)$. Cela revient à résoudre le système : $\begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2}(x-y) = X \\ \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y) = Y \end{cases}$. On trouve $x = \frac{\sqrt{2}}{2}(X+Y)$ et $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}(X-Y)$ et $f$ est bien bijective. En résumé, $f$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$.*
2. *En utilisant les calculs de la question précédente, on a : $f^{-1}$ : $\begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (X,Y) & \longmapsto & \left(\frac{\sqrt{2}}{2}(X+Y), -\frac{\sqrt{2}}{2}(X-Y)\right) \end{cases}$.*
3. *Remarquons que : $f$ : $\begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & \left(\cos\frac{\pi}{4}x - \sin\frac{\pi}{4}y, \cos\frac{\pi}{4}x + \sin\frac{\pi}{4}y\right) \end{cases}$. $f$ est donc la rotation vectorielle d'angle $\frac{\pi}{4}$. On reconnaît par ailleurs que $f^{-1}$ est celle d'angle $-\frac{\pi}{4}$, ce qui est cohérent.*

## Références