Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

Vérifier si les applications entre $\mathbb{R}$-espace vectoriels suivantes sont linéaires ou pas.

1. $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x-y \end{array} \right.$
2. $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x+y+1 \end{array} \right.$
3. $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y,x-y) \end{array} \right.$
4. $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x-y,x+z) \end{array} \right.$
5. $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & xyz \end{array} \right.$
6. $\theta : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & f(1) \end{array} \right.$
7. $\theta : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & 2f+f' \end{array} \right.$
8. $\theta : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \int_0^1 f(t)\, dt \end{array} \right.$
9. $\theta : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{S}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (u_n) & \longmapsto & (u_0,u_1) \end{array} \right.$
10. $\theta : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & \left(X^2+1\right) P \end{array} \right.$

Solution :

1. *Soient* $\alpha,\alpha' \in \mathbb{R}$ *et* $u=(x,y), u'=(x',y') \in \mathbb{R}^2$. *On a :* $f(\alpha u+\alpha' u') = f(\alpha x+\alpha' x', \alpha y+\alpha' y') = (\alpha x+\alpha' x')-(\alpha y+\alpha' y') = \alpha(x-y)+\alpha'(x'-y') = \alpha f(u) + \alpha' f(u')$. f *est bien linéaire.*
2. $f(0,0)=1$. f *n'est donc pas linéaire.*
3. *Soient* $\alpha,\alpha' \in \mathbb{R}$ *et* $u=(x,y), u'=(x',y') \in \mathbb{R}^2$. *On a :* $f(\alpha u+\alpha' u') = f(\alpha x+\alpha' x', \alpha y+\alpha' y') = ((\alpha x+\alpha' x')+(\alpha y+\alpha' y'), (\alpha x+\alpha' x')-(\alpha y+\alpha' y')) = \alpha(x+y,x-y)+\alpha'(x'+y',x'-y') = \alpha f(u)+\alpha' f(u')$. f *est bien linéaire.*
4. *Par un calcul analogue au précédent, on montre que* f *est linéaire.*
5. *On a* $f(2(1,1,1)) = f(2,2,2) = 2^3 \neq 2f(1,1,1) = 2$. f *n'est donc pas linéaire.*
6. *Soient* $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ *et* $f,g \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. *On a :* $\theta(\alpha f+\beta g) = (\alpha f+\beta g)(1) = \alpha f(1)+\beta g(1) = \alpha\theta(f)+\beta\theta(g)$. θ *est bien linéaire.*

7. *Soient* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *et* $f, g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. *On a, par linéarité de la dérivation :* $\theta(\alpha f + \beta g) = 2(\alpha f + \beta g) + (\alpha f + \beta g)' = \alpha(2f + f') + \beta(2g + g') = \alpha\theta(f) + \beta\theta(g)$. θ *est bien linéaire.*
8. *Soient* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *et* $f, g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$. *On a, par linéarité de l'intégrale :* $\theta(\alpha f + \beta g) = \int_0^1 (\alpha f + \beta g)(t)\ dt = \alpha \int_0^1 f(t)\ dt + \beta \int_0^1 g(t)\ dt = \alpha\theta(f) + \beta\theta(g)$. θ *est bien linéaire.*
9. *Soient* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $u, v \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$. *On a :* $\theta(\alpha u + \beta v) = (\alpha u_0 + \beta v_0, \alpha u_1 + \beta v_1) = \alpha(u_0, u_1) + \beta(v_0, v_1) = \alpha\theta(u) + \beta\theta(v)$. θ *est bien linéaire.*
10. *Soient* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *et* $P, Q \in \mathbb{R}[X]$. *On a :* $\theta(\alpha P + \beta Q) = \left(X^2+1\right)(\alpha P + \beta Q) = \alpha\left(X^2+1\right)P + \beta\left(X^2+1\right)Q = \alpha\theta(P) + \beta\theta(Q)$. θ *est bien linéaire.*

Références