Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Soit un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et deux sous-espaces vectoriels A et B de E. On suppose qu'il existe un supplémentaire A' de $A \cap B$ dans A et un supplémentaire B' de $A \cap B$ dans B. Montrer que

$$A + B = (A \cap B) \oplus (A' + B')$$

Solution :

1. *La somme est directe : montrons que $(A \cap B) \cap (A' + B') = \{0_E\}$. Soit $x \in (A \cap B) \cap (A' + B')$. Comme $x \in A' + B'$, il existe $(a', b') \in A' \times B'$ tels que $x = a' + b'$. Alors $b' = x - a' \in A$ et donc $b' \in A \cap B$. Puisque la somme $A \cap B + B'$ est directe, il vient que $b' = 0_E$. On montre de la même manière que $a' = 0_E$ et donc ensuite que $x = 0_E$.*
2. *$(A \cap B) + (A' + B') \subset A + B$ est claire. Soit $x \in (A \cap B) + (A' + B')$. Il existe $(y, a', b') \in (A \cap B) \times A' \times B'$ tels que $x = (y + a') + b' \in A + B$.*
3. *$A + B \subset (A \cap B) + (A' + B')$. Soit $x \in A + B$. Il existe $(a, b) \in A \times B$ tels que $x = a + b$. Comme $A = (A \cap B) + A'$, $\exists (y_1, a') \in (A \cap B) \times A'$ tels que $a = y_1 + a'$. De même, $\exists (y_2, b') \in (A \cap B) \times B'$ tels que $b = y_2 + b'$. Alors $x = y_1 + a' + y_2 + b' = \underbrace{(y_1 + y_2)}_{\in A \cap B} + (\underbrace{a'}_{\in A'} + \underbrace{b'}_{\in B'})$ et donc $x \in (A \cap B) + (A' + B')$.*

Références