Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

24 janvier 2022

Exercice 0.1 ★★ **Pas de titre**

On définit dans l'espace E des suites réelles :

$$F = \{(x_n) \in E \mid \forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+3} - x_{n+2} - x_{n+1} + x_n = 0\}$$
$$G = \{(x_n) \in E \mid \forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} + x_n = 0\}$$
$$H = \{(x_n) \in E \mid \forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n = 0\}$$

Montrer que $F = G \oplus H$.

Solution : *On montre d'abord que $G \subset F$. Si $(x_n) \in G$ et si $n \in \mathbb{N}$ alors $x_{n+1} + x_n = 0$ et $x_{n+3} + x_{n+2} = 0$ donc $x_{n+3} - x_{n+2} - x_{n+1} + x_n = -2\,(x_{n+2} + x_{n+1}) = 0$. On montre aussi que $H \subset F$. Soit $(x_n) \in H$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors $x_{n+3} - x_{n+2} - x_{n+1} + x_n = x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n = 0$.*

1. *Montrons que $G \cap H = \{0_E\}$. Soit $(x_n) \in G \cap H$. Comme $(x_n) \in G$, on montre que $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n = (-1)^n x_0$. En écrivant que $(x_n) \in H$, on trouve que $\forall n \in \mathbb{N}$, $(-1)^n x_0[1 + 2 + 1] = 0$ ce qui montre que $x_0 = 0$ et par la suite, $(x_n) = 0_E$.*
2. *Montrons que $F = G + H$. On a déjà prouvé que $G \subset F$ et $H \subset F$. Par conséquent, $G + H \subset F$. Il nous faut montrer que $F \subset G + H$. Soit $(x_n) \in F$. En effectuant une partie recherche, si $(x_n) = (u_n) + (v_n)$ avec $(u_n) \in G$ et $(v_n) \in H$, puisque $(u_n) \in G$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $(u_n) = \lambda\big((-1)^n\big)$. En écrivant que $(v_n) = (x_n) - (u_n)$, puisque $(v_n) \in H$, il faut que $v_2 - 2v_1 + v_0 = 0$ et par conséquent, on trouve que $\lambda = \dfrac{x_0 - 2x_1 + x_2}{4}$.*

   Partie rédaction : *Posons $\forall n \in \mathbb{N}$,*

   $$u_n = \frac{x_0 - 2x_1 + x_2}{4}(-1)^n$$
   $$v_n = x_n - \frac{x_0 - 2x_1 + x_2}{4}(-1)^n$$

   On a bien $(u_n) + (v_n) = (x_n)$, et $(u_n) \in G$. Montrons que $(v_n) \in H$. Soit $n \in \mathbb{N}$,

   $$v_{n+2} - 2v_{n+1} + v_n = (x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n) - (x_0 - 2x_1 + x_2)(-1)^n$$

   On montre par récurrence sur n (car $(x_n) \in F$), que cette quantité est nulle pour tout entier n.

Références