Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Soit $ABCD$ un parallélogramme. Montrer que

$$AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2.$$

Solution : *Soit I le milieu de $[AC]$ et donc aussi le milieu de $[BD]$.*

$$\begin{aligned}
AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 &= \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}.\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DA} \\
&= \left(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB}\right).\left(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BI}\right) + \left(\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IC}\right).\left(\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IC}\right) + \left(\overrightarrow{CI} + \overrightarrow{ID}\right).\left(\overrightarrow{CI} + \overrightarrow{ID}\right) + \left(\overrightarrow{DI} + \right. \\
&= AI^2 + IB^2 + 2\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{IB} + BI^2 + IC^2 + 2\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{IC} + CI^2 + ID^2 + 2\overrightarrow{CI}.\overrightarrow{ID} + DI^2 + IA^2 + 2 \\
&= 4AI^2 + 4BI^2 + 2\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{IB} + 2\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{ID} + 2\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{IC} + 2\overrightarrow{DI}.\overrightarrow{IC} \\
&= AC^2 + BD^2 + 2\overrightarrow{AI}.\left(\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{ID}\right) + 2\left(\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{DI}\right).\overrightarrow{IC} \\
&= AC^2 + BD^2
\end{aligned}$$

Références