Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et A, B, C trois sous-espaces vectoriels de E vérifiant

$$E = A \oplus B \text{ et } A \subset C$$

Montrer que $C = A \oplus (B \cap C)$.

Solution : *Soit $x \in A \cap (B \cap C)$ alors $x \in A \cap B = \{0\}$ car A et B sont en somme directe. Donc $x = 0$ et les deux sous-espaces vectoriels A et $B \cap C$ sont bien en somme directe. Montrons que $C = A + (B \cap C)$. Soit $x \in C$. Comme $x \in E$ et que $E = A \oplus B$, il existe un unique couple $(x_A, x_B) \in A \times B$ tel que $x = x_A + x_B$. Comme $A \subset C$, $x_A \in C$ et comme C est un sous-espace vectoriel de E, $x - x_A \in C$. Il vient donc $x_B \in C$ ce qui prouve que $x_B \in B \cap C$. On a alors montré que $x \in A + (B \cap C)$ et donc $C = A + (B \cap C)$. En résumé : $C = A \oplus (B \cap C)$.*

Références