Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Soit $E = \mathbb{R}^n$ on considère

$$H = \{(x_1, \dots, x_n) \in E \mid x_1 + \dots + x_n = 0\}$$

Montrer que H est un sous-espace vectoriel de E et trouver un supplémentaire de H. Le supplémentaire trouvé est-il unique ?

Indication 0.0 : Faire un dessin de H lorsque $n = 2$ et $n = 3$.

Solution : *On montre sans problème que H est un sous-espace vectoriel. Considérons $a = (1, \dots, 1) \in R^n$. Alors $a \notin H$. Montrons que $E = \operatorname{Vect}(a) \oplus H$.*

1. $\boxed{\operatorname{Vect}(a) \cap H = \{0\}}$ *: Soit $x \in \operatorname{Vect}(A) \cap H$: il existe $\lambda \in \mathbb{R}$, tel que $x = \lambda a = (\lambda, \dots, \lambda)$. Mais comme $x \in H$, $n\lambda = 0$ d'où $\lambda = 0$ et $x = 0$.*
2. $\boxed{E = \operatorname{Vect}(a) + H}$ *: Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in E$. En supposant le problème résolu, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et $h \in H$ tels que $x = \lambda a + h$. Alors il faut que $x - \lambda a = (x_1 - \lambda, \dots, x_n - \lambda) \in H$ et donc que $\lambda = \dfrac{x_1 + \dots + x_n}{n}$.*
   Posons donc $\lambda = \dfrac{x_1 + \dots + x_n}{n}$ et $h = x - \lambda a$. On vérifie que $x = \lambda a + h$ et que $h \in H$, $\lambda a \in \operatorname{Vect}(a)$.

Le supplémentaire trouvé n'est pas unique (cf dessin dans $\mathbb{R}^3$) : il suffit de prendre un vecteur $a \notin H$ et alors $E = \operatorname{Vect}(a) \oplus H$.

Références