Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

$E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $F = \{f \in E; f(0) = f(1) = 0\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E et trouver un supplémentaire de F dans E.

Indication 0.0 : *Considérer l'ensemble des fonctions telles que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, $f(x) = 0$.*

Solution : *On montre que la fonction nulle est dans F, et que F est stable par combinaison linéaire. Soit*

$$G = \{f \in E; \forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0, x \neq 1, f(x) = 0\}$$

On montre sans problème que G est un sous-espace vectoriel de E. Alors $\boxed{F \cap G = \{0_E\}}$ (c'est clair). Montrons ensuite que $E = F + G$: soit $f \in E$. Définissons

$$f_F = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \textit{si } x = 0 \textit{ ou } 1 \\ f(x) & \textit{sinon} \end{cases} \end{array} \right. \quad \textit{et } f_G : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} f(0) & \textit{si } x = 0 \\ f(1) & \textit{si } x = 1 \\ 0 & \textit{sinon} \end{cases} \end{array} \right.$$

On a bien, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f_F(x) + f_G(x)$ et $f_F \in F$, $f_G \in G$. Finalement, $E = F \oplus G$.

Références