Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

Vérifier si les espaces suivants sont supplémentaires dans $E = \mathcal{C}^0\left([-1,1],\mathbb{C}\right)$

$$F = \left\{ f \in \mathcal{C}^0\left([-1,1],\mathbb{C}\right) \ \mid\ \int_{-1}^{1} f(t)\,dt = 0 \right\} \quad \textit{et} \quad G = \left\{ f \in \mathcal{C}^0\left([-1,1],\mathbb{C}\right) \ \mid\ f \textit{ est constante} \right\}$$

Solution : *On montre facilement que* F *et* G *sont des sous-espaces vectoriels de* $\mathcal{C}^0\left([-1,1],\mathbb{C}\right)$*. L'intersection* $F \cap G$ *est réduite au vecteur nul. En effet, si la fonction* $f \in F \cap G$ *alors* f *est une fonction constante égale à un réel* c *d'intégrale nulle sur* $[-1,1]$ *ce qui amène* $2c = 0$*, c'est-à-dire* $c = 0$*.* f *est donc identiquement nulle. De plus, si* $h \in \mathcal{C}^0\left([-1,1],\mathbb{C}\right)$*, en posant* $\alpha = \int_{-1}^{1} f(t)\,dt$ *et en désignant par* g *la fonction constante sur* $[-1,1]$ *égale à* α*, on vérifie facilement que* $h - g \in F$ *et donc* $E = F + G$*. En résumé :* F *et* G *sont supplémentaires dans* E*.*

Références